18/10/2018.

Φυλλάδιο 2 / Άσκηση 3.

Να βρείτε πού ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους:

α) $z=1$

Έστω $z=a+bi$ με $a,b\in\mathbb{R}$

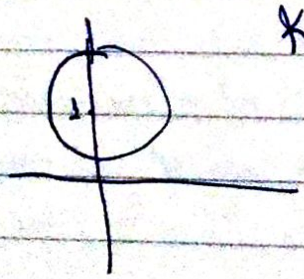
$|z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1$

$|z|=1$ Μοναδ. κύκλος

β) $|z-i|=1$ Τότε $z-i=a+(b-1)i$

άρα $|z-i|=1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-i)^2}=1 \Leftrightarrow a^2+(b-i)^2=1$

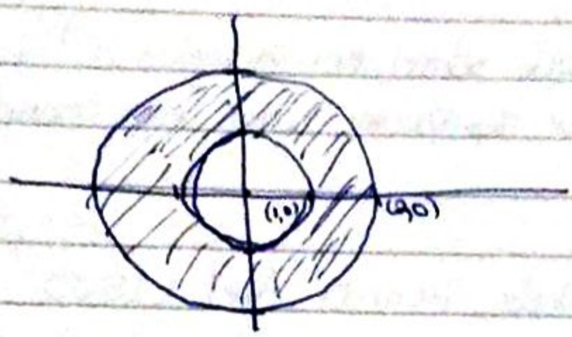
Κύκλος με κέντρο το $(0,1)$ και ακτίνα 1.



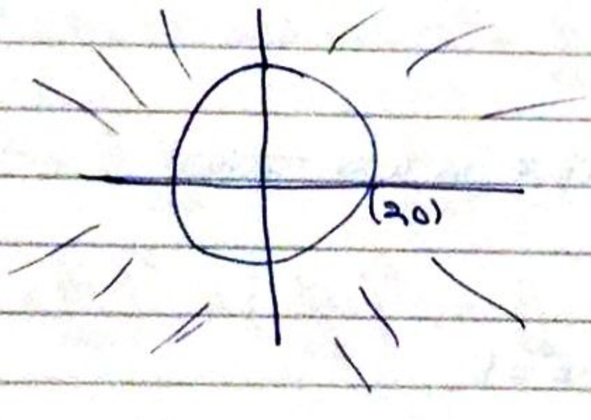
iii) $1<|z|<2$

$|z|>1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}>1 \Leftrightarrow (a,b)$ έξω από τον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα 1

$|z|<2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}<2 \Leftrightarrow a^2+b^2<4 \Leftrightarrow (a,b)$ μέσα στον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα 2.



iv) $|z|\geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\geq 2 \Leftrightarrow a^2+b^2\geq 4 \Leftrightarrow$ είτε (a,b) στον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα 2 είτε (a,b) έξω από αυτό τον κύκλο



Άσκηση 4 | Φυλλάδιο 2

Περιγράψτε στο μιγαδικό επίπεδο το σύνολο

$$A = \{ 2z+1 \;:\; z \in \mathbb{C} \text{ και } |z| = 1 \}$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $w = 2z+1$. Τότε $\frac{w-1}{2} = z \Rightarrow \left|\frac{w-1}{2}\right| = |z| = 1$

$\Rightarrow |w-1| = 2$.

Έστω $w = a + bi$. Τότε $|w-1| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow$

$(a-1)^2 + b^2 = 4$

Άρα (a,b) στον κύκλο με κέντρο το $(1,0)$ με ακτίνα 2

Άσκηση 8 | Φυλλάδιο 1.

Να λύσετε για $z \in \mathbb{C}$ τις εξισώσεις

i) $\bar{z} = z^2$ (*)

ii) $\bar{z} = z^3$.

ΛΥΣΗ

i) Έστω $z \in \mathbb{C}$. Το $z = 0$ είναι λύση της (*).

Έστω $z \in \mathbb{C}$ λύση της (*) με $z \neq 0$.

$$\bar{z} = z^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = z z^2 \Rightarrow z^3 = |z|^2 \quad (**)$$

Παίρνοντας μέτρα στην (**) έχουμε $|z^3| = |z|^2$

$\Rightarrow |z|^3 - |z|^2 = 0 \Rightarrow |z|^2(|z|-1) = 0 \overset{z \neq 0}{\Rightarrow} |z| = 1$.

Επομένως (**) $\Rightarrow z^3 = 1$.

Άρα θέτω $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$

η εξίσωση $z^3 = 1$ έχει ρίζες w, w^2, w^3

Άρα υποψήφιες ρίζες λύσης της $\bar{z} = z^2$ είναι οι $0, w, w^2, w^3 = 1$

Αντίστροφα, με πράξεις έπεται ότι οι $0, w, w^2, w^3$ είναι πράγματι ρίζες της $\bar{z} = z^2$.

· ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ·

Συμβολισμός: $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3 \dots\} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$

Φυσικοί Αριθμοί: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Σημ. Το $0 \in \mathbb{N}$.

Ορισμός: Ένα μη κενό υποσύνολο S το $\mathbb{Z}$ λέγεται

α) φραγμένο άνω, αν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \geq a$ για κάθε $a \in S$

β) φραγμένο κάτω, αν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \leq a$ για κάθε $a \in S$.

Παραδείγματα

- Το $S = \mathbb{Z}$ δεν είναι φραγμένο άνω και δεν είναι φραγμένο κάτω.
- Το $S = \mathbb{N}$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ είναι κάτω φραγμένο.

Απόδειξη

Για $k = 0$, $k \leq a$ για κάθε $a \in \mathbb{N}$ αλλά δεν είναι άνω φραγμένα.

- Το σύνολο $S = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ είναι φραγμένο άνω και φραγμένο κάτω.

Ορισμός: Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ και a στοιχείο του S.

1) Το a λέγεται ελάχιστο στοιχείο του S, και γράφουμε $a = \min S$ αν $k \geq a$ για κάθε $k \in S$

Δηλαδή κάθε στοιχείο του S είναι μεγαλύτερο ή ίσο του a.

2) Το a λέγεται μέγιστο στοιχείο του S και γράφουμε $a = \max S$ αν $k \leq a$ για κάθε $k \in S$.

Παραδείγματα

$S = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ $\min S = 3$, $\max S = 11$

Θεώρημα

Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, φραγμένο άνω. Τότε το S έχει μέγιστο στοιχείο.

Θεώρημα

Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, φραγμένο κάτω. Τότε το S έχει ελάχιστο στοιχείο.

Παρατήρηση

Προσοχή τα αντίστοιχα δεν ισχύουν γενικά για υποσύνολα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα το υποσύνολο $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ είναι φραγμένο άνω και κάτω στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο.

Πόρισμα

Κάθε μη κενό υποσύνολο S των φυσικών $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη

Αφού $\mathbb{N}$ φραγμένο κάτω στο $\mathbb{Z}$, το ίδιο ισχύει και για το S. Άρα από το θεώρημα το S έχει ελάχιστο στοιχείο.

Πρόταση

Έστω S υποσύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$. Υποθέτουμε τα εξής:

1) $1 \in S$

2) Αν $n \in S$ τότε $n+1 \in S$

Τότε $S = \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Έστω ότι δεν ισχύει. Θέτουμε $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \notin S\}$ τότε αφού υποθέσαμε $S \neq \mathbb{N}$ έχουμε $A \neq \emptyset$. Από πόρισμα A έχει ελάχιστο στοιχείο έστω $a = \min A$. Από υπόθεση $1 \in S$. Άρα $1 \notin A$ άρα $a \neq 1$. Επομένως το $a-1 \in \mathbb{N}$. Αφού $a-1 < a \Rightarrow a-1 \in S$. Άρα από υπόθεση $(a-1)+1 \in S$, δηλ. $a \in S$. Αντίφαση αφού $a \in A$.

Εφαρμογή

Ισχύει $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Έστω $S = \{ n \in \mathbb{N} : 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \}$

Βήμα 1ο: $1 \in S$, γιατί $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$

Βήμα 2ο: Υποθέτουμε $n \in S$, δηλ. $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (*)

Θα δείξουμε ότι $n+1 \in S$, δηλαδή ότι $1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (**)

Πράγματι έχουμε $1+2+\dots+n+(n+1) \overset{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$

$$= \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Επομένως η (**) ισχύει. Άρα από πόρισμα $S = \mathbb{N}$, δηλ. ισχύει αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

Παρατήρηση

Ένας ισοδύναμος τρόπος είναι ο εξής:

Για n φυσικό ορίζουμε $P(n)$ την πρόταση $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Βήμα 1ο: Δείχνουμε ότι η $P(1)$ ισχύει

Βήμα 2ο: Υποθέτουμε ότι $n \in \mathbb{N}$ και ότι η $P(n)$ ισχύει

Δείχνουμε ότι η $P(n+1)$ ισχύει.

Όταν κάνουμε τα 1+2 με επιτυχία έχουμε σαν συμπέρασμα ότι η πρόταση $P(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό n.

Παρατήρηση

Έστω n_0 φυσικός και $P(n)$ πρόταση

Υποθέτουμε ότι δείχνουμε ότι η $P(n_0)$ ισχύει και ότι αν n φυσικός με $n \geq n_0$ και η $P(n)$ ισχύει έπεται ότι και η $P(n+1)$ ισχύει.

Τότε σαν συμπέρασμα, έχουμε ότι η $P(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι αν $x \in \mathbb{R}$ με $0 < x < 1$, τότε $(1-x)^n > 1 - nx$ για φυσικό $n \geq 2$.

(Δεν θα ισχύει για $n = 1$)

Λύση Ορίζουμε, για $n \geq 2$ και $x \in \mathbb{R}$ με $0 < x < 1$

$P(n)$ να είναι η πρόταση $(1-x)^n > 1 - nx$.

Θέτουμε $n_0 = 2$

Βήμα 1ο: Η $P(n_0)$ δηλ. η $P(2)$ ισχύει

Αποδ. $(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 > 1 - 2x$ που ισχύει για $x>0$.

Βήμα 2ο: Έστω n φυσικός με $n \geq n_0 = 2$. Υποθέτουμε η $P(n)$ ισχύει δηλ. $(1-x)^n > 1 - nx$ $(*)$

Θα δείξουμε ότι η $P(n+1)$ ισχύει δηλ. ότι $(1-x)^{n+1} > 1-(n+1)x$ $(**)$

Πράγματι $(1-x)^{n+1} = (1-x)^n(1-x) \overset{(*) \text{ και } 0<1-x}{>} (1-nx)(1-x) =$

$= 1 - nx - x + nx^2 = 1-(n+1)x + x^2 > 1-(n+1)x$

Άρα η (**) ισχύει. Συνεπώς η $P(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό $n \geq 2$.